SKUP

1. Kantor*, osnivač teorije skupova, pojam skupa objašnjava na sljedeći način: „Izvjesni, jasno odvojeni i individualizirani objekti naše intuicije ujedinjeni u jednu cjelinu čine skup".
Skup prihvatamo kao osnovni pojam.**

2. Ako je x elemenat skupa S, onda ćemo pisati $x \in S$; u suprotnom, $x \notin S$ ili x non $\in S$. U tom smislu $S = \{x | x \in S\}$, što čitamo kao „S je skup elemenata x koji imaju osobinu da x pripada skupu S". Uopštavajući takav pristup, kažemo da skup S sadrži one elemente x koji imaju svojstvo $P(x)$ $(\Leftrightarrow x \in S)$, tj. $S = \{x | P(x)\}$, što treba da znači „S je skup svih elemenata x koji imaju svojstvo $P(x)$".

3. Ako svaki elemenat skupa A pripada i skupu B, tada se kaže da je A *podskup od* B (ili da je B *nadskup* od A), što se zapisuje kao $A \subset B$ (ili $B \supset A$), tj. prema simbolima matematičke logike

$$A \subset B \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

4. Jednakost skupova definiše se na sljedeći način:

$$A = B \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Ova definicija je u skladu sa $S = \{x | x \in S\}$.

5. $\emptyset$ je oznaka za *prazan skup*, tj. skup koji nema nijednog elementa. Na primjer, $\emptyset$ je skup realnih brojeva koji su rješenja jednačine $x^2 + 1 = 0$. Osim toga, za svaki skup A je $\emptyset \subset A$.
Vodeći računa o definiciji inkluzije i operacija ekvivalencije i implikacije, lako je dokazati:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

6. Neka su A i B skupovi; tada definišemo operacije nad skupovima:

6.1. *Unija skupova* A i B:

$$A \cup B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

6.2. *Presjek skupova* A i B:

$$A \cap B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

6.3. *Razlika (diferencija) skupova* A i B:

$$A \setminus B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

6.4. Ako je $A \subset I$, skup

$$A' \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x | x \notin A \wedge x \in I\}$$

nazivamo *komplementom skupa* A u odnosu na skup I.

7. *Partitivni skup* $P(A)$ skupa A je skup svih podskupova od A, tj.

$$P(A) \overset{\mathrm{Df}}{=} \{B | B \subset A\}.$$

Primjer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, tada je:

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, A\}$.

8. *Uređen par* elemenata a i b je

$$(a, b) \overset{\mathrm{Df}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\},$$

gdje se a naziva prva *koordinata* (*komponenta* ili *projekcija*) i b druga koordinata uređenog para (a, b).
Na osnovu ove definicije dokazuje se da je

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d).$$

Analogno se definiše uređena n-torka

$(a_1, \ldots, a_n)$ koja se označava, takođe, sa $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

9. Neka su A i B skupovi, tada je *Dekartov* (*Kartezijev*)* *proizvod* tih skupova

$$A \times B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}, \text{ tj.}$$

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a, b) \in A \times B.$$

Analogno, za kakav god konačan broj (ne nužno različitih skupova)

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ je $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \overset{\mathrm{Df}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \ldots \wedge a_n \in A_n\}$.

Ako je $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, umjesto $A \times A \times \ldots \times A$ pišemo A^n.

---

* Georg Cantor (1845–1918), njemački matematičar, osnivač moderne teorije skupova.

** Teorija skupova neće ovdje biti tretirana kao formalizirana deduktivna teorija, već samo neformalno kao takozvana „klasična" ili „naivna" teorija skupova. Vidjeti o tome: Đuro Kurepa, Teorija skupova, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

ZADACI

1. Dokazati da za operacije $\cup$, $\cap$ nad skupovima vrijedi:

a) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ (idempotentnost $\cup$ i $\cap$);

b) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (komutativnost);

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asocijativnost);

d) $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ (apsorptivnost);

e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivnost $\cup$ prema $\cap$, tj. obratno, $\cap$ prema $\cup$);

f) zapisati distributivnost $\cap$ prema $\cap$, tj. $\cup$ prema $\cup$ i dokazati da odgovarajuće formule vrijede.

2. Dokazati De Morganove* formule:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

3. Ako su $A, B \subset S$ i $A' = C_s A$, $B' = C_s A$, dokazati:

a) $\emptyset = S$, $S' = \emptyset$; b) $(A')' = A$; c) $A \cup A' = S$, $A \cap A' = \emptyset$;

d) $A \subset B \Leftrightarrow A' \supset B' \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$;

e) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B' \Leftrightarrow B \subset A'$; f) $A \cup B = S \Leftrightarrow A' \subset B \Leftrightarrow B' \subset A$.

4. Dokazati (Dedekind)*:

$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

5. Neka je simetrična razlika skupova $A \triangle B \stackrel{\mathrm{Df}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Dokazati da vrijedi:

a) $A \triangle B = B \triangle A$; b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

c) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$; d) $A \triangle \emptyset = A$, $A \triangle A = \emptyset$;

e) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$; f) $A \triangle B = [A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)]$;

g) Ako je $A, B, C \subset S$, vrijedi

$$(A \triangle B \triangle C)' = [(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)] \setminus (A \cap B \cap C),$$
$$= [(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)] \setminus (A \cap B \cap C),$$

(vidi prethodni zadatak).

---

* Richard Dedekind (1831 – 1916), njemački matematičar.

** Euklid (oko 330 – oko 275), starogrčki matematičar.

6. Ako su A, B, C, D skupovi, dokazati da je:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

d) $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$;

e) $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

7. Iz $A \triangle X = A \Rightarrow X = \emptyset$. Dokazati.

RJEŠENJA

1. Sve formule se na osnovu definicija jednakosti skupova i operacija $\cap$, $\cup$ svode na dokazivanje analognih formula u algebri sudova.

Npr.:

d) $x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A \vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$;

e) $x\in A\cup(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge (x\in A \vee x\in C) \Leftrightarrow x\in (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Primjedba: Uporedite ovaj zadatak sa zadatkom 1.1.3!

2. Niz ekvivalencija

$x\in(A\cup B)' \Leftrightarrow x\notin A\cup B \Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B)' \Leftrightarrow (x\notin A \wedge x\notin B) \Leftrightarrow x\in A' \wedge x\in B' \Leftrightarrow x\in A'\cap B'$ proizlazi na slijedeći način: prve dvije na osnovu definicije komplementa i unije, treća na osnovu De Morganove formule za sudove, četvrta, opet, prema definiciji komplementa i posljednja prema definiciji presjeka. Sad je, na osnovu tranzitivnosti ekvivalencije: $x\in(A\cup B)' \Leftrightarrow x\in A'\cap B'$, što prema definiciji jednakosti znači da je $(A\cup B)' = A'\cap B'$.

Druga De Morganova formula dokazuje se analogno.

3. a) $x\in\emptyset' \Leftrightarrow x\in S\ (\wedge\, x\notin\emptyset)$, $x\in S' \Leftrightarrow x\notin S \Leftrightarrow x\in\emptyset$;

b) $x\in(A')' \Leftrightarrow (x\in A')' \Leftrightarrow ((x\in A)')' \Leftrightarrow x\in A$;

c) $x\in A\cup A' \Leftrightarrow x\in A \vee x\notin A \Leftrightarrow x\in S\ (A,\ A'\subset S)$,

$x\in A\cap A' \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin A \Leftrightarrow x\in\emptyset$;

d) $A\subset B \Leftrightarrow (x\in A \Rightarrow x\in B) \Leftrightarrow (x\notin B \Rightarrow x\notin A) \Leftrightarrow (x\in B' \Rightarrow x\in A') \Leftrightarrow B'\subset A'$;

e) $A\cap B=\emptyset \Leftrightarrow (x\in A \Rightarrow x\notin B) \Leftrightarrow A\subset B' \Leftrightarrow B\subset A' \Leftrightarrow A\subset B'$;

f) $A\cup B=S \Leftrightarrow A'\cap B'=\emptyset \overset{e)}{\Leftrightarrow} A'\subset B \Leftrightarrow B'\subset A$.

4. Neka je $a = x\in A$, $b = x\in B$, $c = x\in C$ i formule $\alpha=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$, $\beta=(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$. Tada je Dedekindova formula, prema definiciji jednakosti skupova, ekvivalentna sa formulom $\alpha=\beta$ u algebri sudova.

5. a) Proizlazi iz definicije simetrične razlike na osnovu komutativnosti unije.

b) Dokažimo prvo $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.
Postupak nastaviti kao u prethodnom zadatku.

6. a) $(x,\ y)\in(A\cup B)\times C \Leftrightarrow x\in A\cup B \wedge y\in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B)\wedge y\in C \Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in C)\vee(x\in B \wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow (x,\ y)\in A\times C \vee (x,\ y)\in B\times C \Leftrightarrow (x,\ y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$, gdje niz ekvivalencija slijedi na osnovu: definicije Dekartovog proizvoda, definicije unije, distribucije $\wedge$ prema $\vee$, definicije Dekartovog proizvoda i definicije unije, respektivno.

Slično se dokazuju i ostale formule.

7. Pretpostavimo da je $X\neq\emptyset$, tj. neka postoji $x\in X$. Tada postoje dvije mogućnosti:

1° $x\in X \wedge x\in A \Rightarrow x\notin A\Delta X$,

2° $x\in X \wedge x\notin A \Rightarrow x\in A\Delta X$,

što je kontradiktorno sa $A\Delta X = A$, te pretpostavka $X\neq\emptyset$ otpada. Dakle, $X=\emptyset$.

---

* Arthur Cayley (1821 – 1895), engleski matematičar.